n. 5 (2010)

ISSN 1980-7341

# SOBRE O PROBLEMA DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA DE UM CORPO

**Jair Sandro Ferreira da Silva** *

**Resumo**

Este artigo abordará a aplicabilidade das Equações Diferenciais na variação de temperatura de um corpo. Tomaremos como fundamento a Lei de Variação de Temperatura de Newton, cujo modelo matemático é uma Equação Diferencial Ordinária de 1ª ordem e 1º grau a qual depois de resolvida permite determinar a temperatura aproximada de um corpo em qualquer instante.
**Palavras-chave:** Equações Diferenciais; variação de temperatura; Lei de Resfriamento de Newton.

**Abstract**

This article will address the applicability of differential equations in the temperature Variation of a body. We will take as a basis for the Law of Temperature Variation Newton, whose mathematical model is an ordinary differential equation of order 1 and 1 degree after which resolved to determine the approximate temperature of a body at any time.
**Keywords:** Differential Equations, variation of temperature; Law of Cooling Newton.

## Introdução

As equações diferenciais têm hoje ampla variedade de aplicações nas ciências físicas, biológicas e sociais, isto é, existem substâncias naturais radioativas que decaem com uma taxa proporcional à quantidade de material presente; o calor passa de um corpo quente em um ambiente mais frio a uma taxa de variação proporcional à diferença de temperatura do corpo e do ambiente; que os corpos se deslocam de acordo com as leis de movimento de Newton; que as populações isoladas de insetos, bactérias, crescem a uma taxa proporcional à população presente. Cada uma destas afirmações envolve uma taxa de variação (derivada) e, por isso, ao ser expressa matematicamente, assume a forma de uma equação diferencial e esta é o modelo matemático do processo.

* Pós-graduado em Matemática pelo UNIVAG.

n. 5 (2010)

ISSN 1980-7341

Neste artigo daremos ênfase na aplicabilidade das equações diferenciais à problemas de variação de temperatura de um corpo, onde utilizaremos a Lei de Variação de Temperatura de Newton como ferramenta do processo.

**Um pouco da história das Equações Diferenciais**

Equação Diferencial é uma peça fundamental da análise e do cálculo, é uma ferramenta matemática importante para o estudo das ciências físicas. Assim, é amplamente aceito que as equações diferenciais são importantes tanto para a matemática pura, quanto para a matemática aplicada. Os fundamentos deste assunto estão contemplados nas contribuições de Leonhard Euler. Não podemos nos esquecer que não se resume só nele o seu desenvolvimento. Existem vários matemáticos importantes que vieram antes de Euler, cujas contribuições foram necessárias para desenvolver muitas das idéias fundamentais.

A história começa com os inventores do cálculo Newton e Leibniz. A partir do momento que estes matemáticos brilhantes tiveram entendimento suficiente e notação para a derivada, esta logo apareceu em equações e o assunto nasceu. Contudo, logo descobriram que as soluções para estas equações não eram tão fáceis. As manipulações simbólicas e simplificações algébricas ajudaram apenas um pouco. Por volta do início do século 18, viraram uma febre as pesquisas em equações diferenciais e os matemáticos começaram a aplicar estes tipos de equações a problemas em astronomia e ciências físicas. Jacob Bernoulli estudou cuidadosamente e escreveu equações diferenciais para o movimento planetário, usando os princípios de gravidade e movimento desenvolvidos por Newton. Nesta época, as equações diferenciais estavam interagindo com outros tipos de matemática e ciências para resolver problemas aplicados significativos. Assim, foram surgindo vários físicos e matemáticos que, cada vez mais, avançaram nos seus estudos de cálculo e equações diferenciais, tais como Ricatti, os irmãos Bernoulli, Johann, Jacob e Daniel, ... Mas foi com Taylor que começou um novo ramo da matemática intimamente relacionado ao desenvolvimento das equações diferenciais.

Em muitos casos, técnicas de soluções iludiram perseguidores por cerca de 50 anos, foi quando Leonhard Euler chegou à cena das equações diferenciais. Euler teve o benefício de trabalhos anteriores, mas a chave para seu entendimento era seu conhecimento e percepção de

CONNECTION LINE REVISTA ELETRÔNICA DO UNIVAG n. 5 (2010)

ISSN 1980-7341

funções. Euler entendeu o papel e a estrutura das funções, estudou suas propriedades e definições. Rapidamente, achou que as funções eram a chave para entender equações diferenciais e desenvolveu métodos para suas resoluções. Ele era o mestre que este assunto necessitava para se desenvolver além de seu início primitivo, tornando-se um assunto coeso e central ao desenvolvimento da matemática aplicada moderna. Depois de Euler vieram vários matemáticos que refinaram ou estenderam muitas das suas idéias.

## Lei de Variação de Temperatura de Newton

Em 1701, quando tinha quase 60 anos, Newton publicou anonimamente um artigo intitulado "Scala Graduum Caloris", em que descreve um método para medir temperaturas de até 1.000°C, algo impossível aos termômetros da época. O método estava baseado no que hoje é conhecido como a Lei de Variação de Temperatura de Newton: a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e o ambiente.

Em muitas situações em que ocorre a variação de temperatura de um corpo, podemos aplicar a Lei de Variação de Temperatura de Newton através de uma modelagem matemática de Equações Diferenciais Ordinárias. Contudo, nem sempre é possível "visualizar" essa aplicabilidade em nosso cotidiano. Assim, mostraremos alguns exemplos do dia a dia em que é possível a aplicação da Lei de Variação de Temperatura de Newton, considerando que a taxa de resfriamento de um corpo depende de fatores tais como: a diferença de temperatura entre o corpo e o meio externo, as condições do ambiente onde o corpo foi colocado, o tempo em que o corpo permanece em contato com o ambiente, o material do corpo, a superfície do corpo exposta ao ambiente, ...

- Mudança de têmpera feita em peças de aço

Um procedimento fundamental para a dureza e elasticidade do aço é obtido através de um tratamento térmico, o qual consiste basicamente no aquecimento e resfriamento do aço. Parte fundamental desse procedimento é o revenimento, que consiste em inserir uma peça em um forno que está a uma determinada temperatura, aguardar a peça chegar à temperatura desejada

n. 5 (2010)

ISSN 1980-7341

para que haja um acomodamento natural de sua estrutura e retirar esta peça do forno, deixando-a resfriar até a temperatura ambiente.

Com o auxílio da equação da Lei de Variação de Temperatura de Newton, é possível determinar o tempo necessário para permanência da peça dentro do forno, para que esta atinja a temperatura de revenimento. Com o cálculo destes tempos, acredita-se também que seja possível aperfeiçoar a utilização do forno, permitindo uma maior produtividade, além de economia por tempo de utilização do equipamento.

- Resfriamento de materiais biológicos para preservação

Entre os vários métodos de preservação de materiais biológicos, o resfriamento é amplamente utilizado, por permitir a conservação das propriedades quantitativas e qualitativas desejáveis desses materiais em estado quase inalterado e natural.

Por exemplo, o pré-resfriamento de frutas é uma das mais importantes etapas da pós-colheita e consiste na remoção rápida do calor dos frutos oriundos dos campos, antes do armazenamento, processamento ou comercialização, no qual é preciso estocar essas frutas em câmaras de refrigeração para que esses alimentos durem por mais dias ou até mesmo meses. Por isso, se faz necessário diminuir a temperatura dessas frutas, antes que sejam armazenadas nas câmaras de refrigeração, pois, as mesmas não conseguem manter muitos alimentos a uma temperatura adequada, para que assim não estraguem rapidamente. Esse mesmo processo de resfriamento também é usado para a diminuição das perdas de produtos hortícolas frescos, os quais em grande parte dependem da rápida diminuição da temperatura após a colheita. O objetivo do armazenamento é manter a qualidade interna e externa desses alimentos.

Tal procedimento é realizado através de dois tipos de resfriamento, água gelada ou ar forçado. Antes de entrar na câmara fria, por exemplo, as maçãs recebem um banho, atravessando um tanque de água gelada sobre uma esteira rolante, durante um determinado tempo, saindo numa temperatura média desejada, verificando-se que quanto maior o tempo (em minutos) que a maçã fica no banho menor é a temperatura (em °C), como desejado.

Para o pré-resfriamento das maçãs por ar forçado, utiliza-se um túnel com fluxo de ar forçado, no qual são mantidas as maçãs até que se obtenham a temperatura desejada.

Sendo assim, é possível através da Lei de Variação de Temperatura de Newton determinar o

n. 5 (2010)

ISSN 1980-7341

tempo necessário para que as maçãs em contato com a água gelada ou ar forçado atinjam a temperatura necessária para o armazenamento.

Outro exemplo de aplicação é no processo de resfriamento do leite cru. Ao baixarmos sua temperatura, retardamos os processos químicos e o crescimento microbiano, evitando dessa forma a queda da qualidade do produto. Esse processo consiste em baixar a sua temperatura a uma igual ou inferior a 4° C, temperatura esta que deve ser atingida no máximo em 3h após o término da ordenha na propriedade rural e nela mantida em um período máximo de 48h antes de ser transportado para um estabelecimento industrial para ser processado, onde deve apresentar no momento do seu recebimento, temperatura igual ou inferior a 7°C. O resfriamento na propriedade rural tem por objetivo inibir o crescimento bacteriano e prolongar o armazenamento do produto na propriedade rural de forma a reduzir os custos de transporte e evitar a perda da qualidade do produto. O crescimento de bactérias no leite é reduzido por meio do resfriamento abaixo de 10°C, mas temperaturas próximas de 3°C a 4°C, atingidas de uma forma rápida, permitem que as atividades bacterianas sejam minimizadas. Uma das técnicas mais usadas pelos produtores rurais de leite para o resfriamento rápido desse produto é o sistema de expansão direta que consiste em tanques de resfriamento do leite, onde o mesmo é projetado como um evaporador, sendo que o calor do leite passa pela parede de aço inoxidável para o meio de resfriamento. Sendo assim, o meio de resfriamento se evapora, retirando o calor do leite. A Lei de Variação de Temperatura de Newton determina quanto tempo o leite deve permanecer em contato com essa parede inoxidável, para que se obtenham a temperatura desejada.

## Fundamentação Teórica da Lei de Variação de Temperatura de um Corpo

### O Modelo Matemático

Um corpo com temperatura $T$ que não possui internamente nenhuma fonte de calor, quando deixado em um meio ambiente, tende àquela do meio que o cerca $(T_m)$. Assim, se a temperatura do corpo $T$ é menor que a temperatura ambiente $T_m$, este corpo se aquecerá e, caso contrário, se resfriará. A temperatura do corpo será, pois, uma função contínua do tempo, $T(t)$.

CONNECTION LINE REVISTA ELETRÔNICA DO UNIVAG n. 5 (2010)

ISSN 1980-7341

Verifica-se experimentalmente que quanto maior for a diferença entre a temperatura do ambiente e a do corpo, mais rápido, será a variação de $T(t)$. Isto é evidenciado de forma precisa pela chamada Lei de Variação de Temperatura enunciada por Isaac Newton.

Neste modelo matemático, a temperatura do corpo nunca atingirá a temperatura $T_m$ (teoricamente $T \to T_m$ quando $t \to \infty$).

Sobre a condução do calor, um modelo real simples que trata sobre a troca de calor de um corpo com o meio ambiente em que o mesmo está colocado, aceita três hipóteses simplificadoras:

1. A temperatura $T = T(t)$ depende do tempo $t$ e é a mesma em todos os pontos do corpo.
2. A Temperatura $T$ do meio ambiente permanece constante ao longo da experiência.
3. A taxa de variação da temperatura com relação ao tempo $t$ é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio ambiente.

A montagem e resolução da equação diferencial assumem como verdadeiras estas hipóteses e, dessa forma

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

onde $T = T(t)$ é a temperatura do corpo no instante $t$, $T_m$ é a temperatura constante do meio ambiente e $k$ é uma constante de proporcionalidade que depende do material do corpo, da massa e da superfície exposta ao ambiente, sendo que o sinal negativo indica que a temperatura do corpo está diminuindo com o passar do tempo, em relação à temperatura do meio ambiente. Por definição, essa constante de proporcionalidade é representada pela seguinte razão:

$$k = \frac{\alpha S}{mc}$$

onde, $\alpha$ é o coeficiente de troca de calor e depende da forma, tamanho do corpo e do contato entre o corpo e o meio que o rodeia, pois, podemos verificar que quanto maior for a superfície de contato entre o corpo e o meio externo (ambiente) maior será a rapidez de resfriamento/aquecimento. $S$ representa a área do corpo, $m$ a sua massa e $c$ o calor específico

CONNECTION LINE REVISTA ELETRÔNICA DO UNIVAG n. 5 (2010)

ISSN 1980-7341

do material do corpo, sabe-se que quanto maior o valor do calor específico do material do corpo, uma maior quantidade de energia será necessária para variar a sua temperatura.

Assim, como as características do corpo são importantes neste processo, as características do meio em que este está imerso, também o são. Por exemplo, se o objeto está em contato com o ar, que é um bom isolante térmico, mais lento serão os processos de resfriamento ou aquecimento do que se estiver imerso em água. A condutividade térmica da água é maior que a do ar. Uma outra característica importante é a mobilidade do meio externo em relação ao objeto, quanto maior for esta mobilidade, mais rápidas se darão as trocas térmicas entre o objeto e o meio em contato com o mesmo, por exemplo, quando queremos resfriar mais rápido um cafezinho sopramos sobre ele.

Assim, podemos verificar que a constante de proporcionalidade *k* depende de diversos fatores, a equação diferencial que rege este processo de variação de temperatura é uma equação diferencial de 1ª ordem e 1º grau de variáveis separáveis[1], que pode ser transformada em,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{(T - T_m)} = -kdt$$

Integrando ambos os membros temos,

$$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = -\int kdt$$

$$\ln(T - T_m) = -kt + k_0$$

Da definição de logaritmo, vem,

$$T - T_m = e^{-kt+k_0}$$

$$T - T_m = e^{-kt} \cdot e^{k_0}$$

Como $e^{k_0} = C$, temos $T - T_m = C \cdot e^{-kt}$

E a solução geral da equação diferencial será

$$T(t) = T_m + C \cdot e^{-kt}$$

Sabe-se que a temperatura inicial do corpo é $T(0) = T_0$, então substituindo $t = 0$ na solução da equação, podemos obter o valor da constante $C$ que aparece na solução geral,

$$T(t) = T_m + C \cdot e^{-kt}$$

CONNECTION LINE REVISTA ELETRÔNICA DO UNIVAG n. 5 (2010)

ISSN 1980-7341

$$T(0) = T_m + C \cdot e^{-k.0}$$

$$T_0 = T_m + C.1$$

$$C = T_0 - T_m$$

Assim, a temperatura de um corpo em qualquer momento é dada pela função

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

## Exemplo Ilustrativo: Uma Aplicação na Criminalística

1. Esta equação diferencial também pode ser classificada como uma linear $\frac{dT}{dt} + kT = T_m$.

> …ação Criminal, um perito criminal examina o cadáver e diz: Está morto há tantas horas. Mas será tão simples assim?
> Na verdade, é um pouco mais complicado. Há diversos métodos para se determinar quando ocorreu o óbito, mas alguns têm algo em comum: a matemática. ’’

Existem hoje várias técnicas para indicar a hora do óbito. A forma mais simples e usada no mundo é a medição da temperatura do cadáver por meio de um termômetro. Quando um indivíduo morre, sua temperatura que era em torno de 36,5ºC começa a cair e tende a se igualar a temperatura do ambiente. No entanto, o método não deve ser aplicado se o cadáver perdeu muito sangue ou se morreu devido à ingestão de algum tipo de veneno especial ou se passar muito tempo após o óbito, quando ficará difícil de determinar esta variação de temperatura e levando em conta também que fatores, afetam a perda de temperatura e explicam a margem de erro dessa técnica (fatores que serão desconsiderados neste artigo).

Tal aplicação se torna possível devido a mecanismos bioquímicos que são mantidos em nosso corpo a uma temperatura constante de aproximadamente 36,5ºC. Quando ocorre o óbito, estes mecanismos deixam de funcionar e, então, a temperatura do corpo começa a diminuir da mesma forma que uma xícara de café esfria depois de servido.

Assim, é possível determinar a hora aproximada de óbito de uma pessoa através de um modelo matemático de Equação Diferencial Ordinária aplicada na Lei de Variação de Temperatura de Newton.

Assim, suponhamos que o corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22h e 30min o perito criminal chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que

CONNECTION LINE REVISTA ELETRÔNICA DO UNIVAG n. 5 (2010)

ISSN 1980-7341

era de 32,5°C. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5°C. A temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5°C. Devemos admitir também que a temperatura normal de uma pessoa viva seja, aproximadamente, de 36,5°C. É possível determinar a hora aproximada em que essa pessoa veio a óbito? [2]

Através da Lei de Variação de Temperatura de Newton, é possível determinar a hora aproximada em que a vítima veio a óbito.

Os valores atribuídos neste exemplo são meramente ilustrativos.

ıantém-se constante

| *Horário das medições* | *Temperatura do Corpo* |
|---|---|
| Hora de óbito? | T = 36,5ºC |
| 22h30min | T = 32,5ºC |
| 23h30min | T = 31,5ºC |

Sendo $T$ a temperatura do corpo e $T_m$ a temperatura do ambiente, tomaremos como tempo inicial a primeira medição da temperatura de $T_0$ = 32,5° quando $t = 0$, então,

$T_m$ = *16,5ºC*

*T(0) = 32,5ºC* (tempo em que o perito efetuou a 1ª medição da temperatura)

*T(1) = 31,5ºC* (tempo em que o perito efetuou a 2ª medição de temperatura)

Como vimos, a função que determina a temperatura aproximada de um corpo em relação ao tempo é dada por

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m) \cdot e^{-kt}$$

$$T(t) = 16,5 + (32,5 - 16,5) \cdot e^{-kt}$$

$$T(t) = 16,5 + 16.e^{-kt}$$

CONNECTION LINE REVISTA ELETRÔNICA DO UNIVAG n. 5 (2010)

ISSN 1980-7341

Assim, no instante em que *t = 1*, temos

$$T(1) = 16,5 + 16.e^{-k.1}$$

$$31,5 = 16,5 + 16.e^{-k}$$

$$e^{-k} = 15/16$$

Resolvendo esta equação exponencial, temos que,

$$\ln e^{-k} = \ln(15/16)$$

$$-k.\ln e = \ln(15/16)$$

$$-k.1 = \ln(15/16)$$

$$k = 0,0645385$$

e dessa forma a função que determina a temperatura do corpo em qualquer instante é

$$T(t) = 16,5 + 16.e^{-0,0645385t}$$

Assim, para determinar a hora do óbito, basta substituir T = 36,5ºC na função e resolver para *t*,

$$T(t) = 16,5 + 16.e^{-0,0645385t}$$

$$36,5 = 16,5 + 16.e^{-0,0645385t}$$

$$e^{-0,0645385t} = 20/16$$

$$\ln e^{-0,0645385t} = \ln(20/16)$$

$$-0,0645385t = \ln(20/16)$$

$$t \approx -\frac{\ln(20/16)}{0,0645385} \approx \text{ -3,4575 horas ou -3h27min}$$

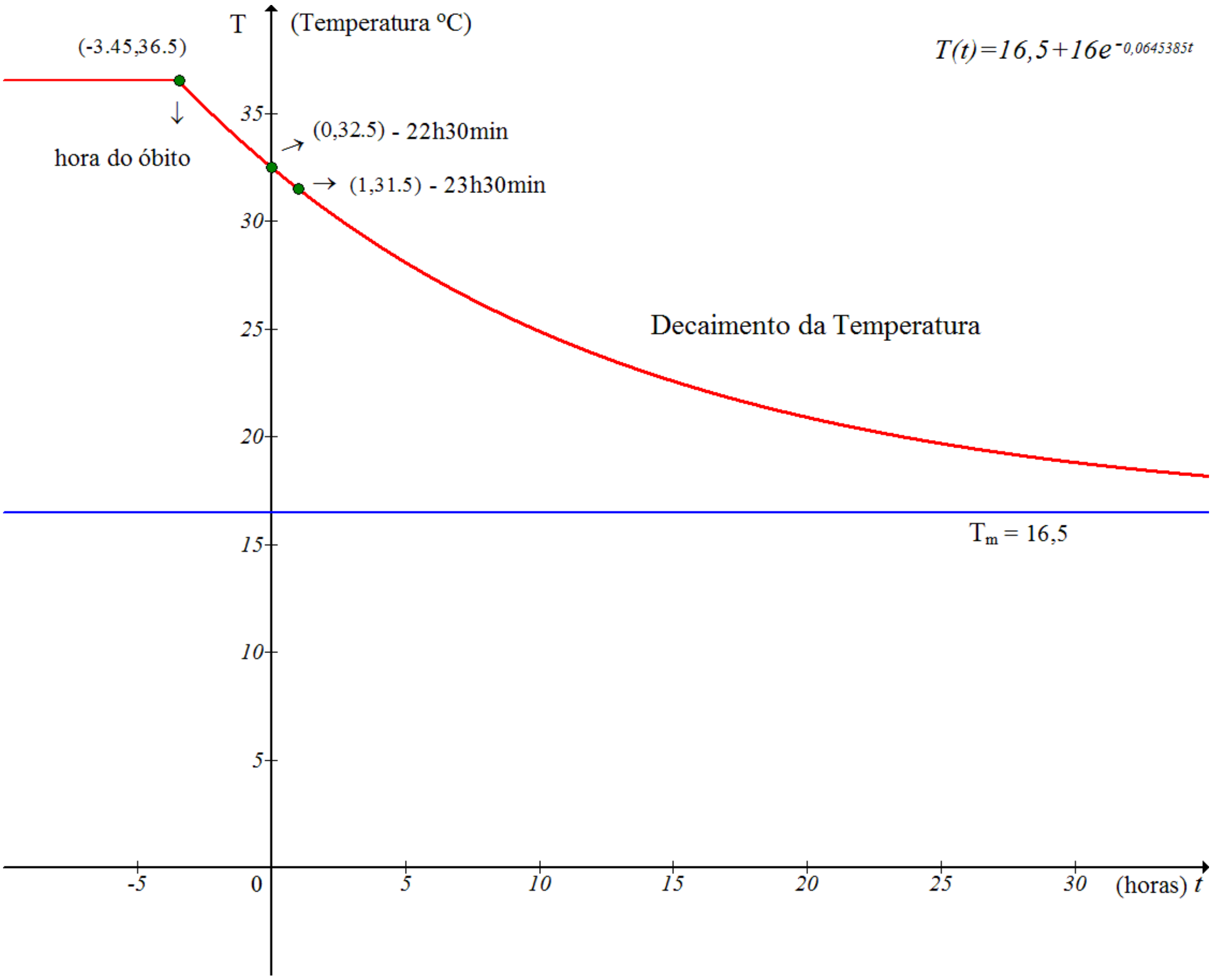
Sendo que o perito tomou a primeira temperatura do corpo às 22h30min, conclui-se que esse corpo veio a óbito 3h27min atrás. Logo, a hora aproximada do óbito ocorreu por volta das 19h03min.

O gráfico a seguir mostra o decaimento de temperatura do corpo a partir da função obtida, onde o eixo *vertical* representa a temperatura do corpo, o eixo *horizontal* o tempo em horas,

CONNECTION LINE REVISTA ELETRÔNICA DO UNIVAG n. 5 (2010)

ISSN 1980-7341

considerando que a temperatura no instante do óbito estava em torno de 36,5°C, e a *origem* como o tempo em que o perito executou a 1ª medição de temperatura.




Esperamos que este artigo tenha contribuído para evidenciar a importância do estudo de Modelagem Matemática de Equações Diferenciais e da Lei de Variação de Temperatura de Newton, pois, todas tem grande aplicabilidade na prática, auxiliando tanto na compreensão quanto na determinação do funcionamento de sistemas físicos, biológicos, econômicos e até mesmo sociais.

## Referências Bibliográficas

Centro Federal de Educação Tecnológica de Pelotas – CEFET-RS. Resfriamento de um Corpo. Disponível em: <http://www2.pelotas.ifsul.edu.br/denise/caloretemperatura/resfriamento.pdf>. Acesso em: 13/09/2009

CONNECTION LINE REVISTA ELETRÔNICA DO UNIVAG n. 5 (2010)

**ISSN 1980-7341**

Equações Diferenciais Ordinárias: Lei do Resfriamento de Newton. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/edo/edoaplic.htm>. Acesso em: 06/09/2009

FURASTE, Pedro A. *Normas Técnicas para o Trabalho Científico. Explicitações das Normas da ABNT*. 13ª edição, Porto Alegre: ABNT Editora, 2005.

História do Cálculo: Historia das Equações Diferenciais. Disponível em: <http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/thomas_br/medialib/indexb.html>. Acesso em: 27/08/2009

LOUZADA, Maria Ivete de Freitas. *Pré-Resfriamento de Maçã (Malus domestica Borkh.), cv. Fuji, em função da temperatura e velocidade do ar*. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbf/v25n3/18694.pdf>. Acesso em: 15/10/2009

MENEGOTTO, Willian. *Aplicação da Matemática na Engenharia: Resfriamento de um Corpo*. Universidade de Caxias do Sul. Disponível em: <http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/EDO-resfriamento.PDF>. Acesso em: 13/09/2009

SODRÉ, Prof. Ulysses. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil. pág. 46 a 49. Disponível em: <http://www.dcc.ufam.edu.br/~rsb/tutoriais/edo.pdf>. Acesso em: 02/09/2009.

ZILL, Dennis G. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*, São Paulo, Pioneira Thomson Learning Ltda, 2003.

Software utilizado para fazer as equações e o gráfico: *MathType* e *Graph 4.3*